PLPSTA31 – Statistiques 2
Tests d'hypothèses statistiques

Exercices sur la p-valeur – Risques d'erreur et puissance d'un test

Mode d'emploi pour les exercices 1 et 2

Pour démarrer un exercice, il faut cliquer sur Début.
Pour afficher le score obtenu au questionnaire et les réponses correctes, il faut cliquer sur Fin, puis sur le bouton Réponse :

– le signe ✔ indique que la réponse donnée est correcte ;
– le signe ✘ indique que la réponse donnée est incorrecte ; les réponses correctes manquantes sont marquées par ●.

Pour certaines questions, les réponses sont détaillées : cliquer sur un des symboles verts ✔ ou ● pour accéder aux compléments de réponse.

Attention : il peut y avoir plusieurs propositions correctes dans une liste. Il faut toutes les cocher pour que la réponse à la question soit considérée comme exacte.

Retour

Exercice 1

Début

1. On teste $H_0 : \mu = 10$ contre $H_1 : \mu > 10$ à un niveau α donné. Sur l'échantillon de taille $n = 32$ tiré au sort, on observe la moyenne $\overline{x}_{\text{obs}} = 11,5$. La p-valeur α_{obs} est égale à $3,84\%$.

(a) La p-valeur est la probabilité sous H_0 d'observer sur un échantillon de taille 32 tiré au sort dans la population une valeur de $\overline{X}_n$

- ☐ supérieure ou égale à 10
- ☐ supérieure ou égale à 11,5
- ☐ inférieure ou égale à 10
- ☐ inférieure ou égale à 11,5

(b) Pour un test au niveau α :

(i) On rejette H_0 et on accepte H_1 si : ☐ $\alpha > 3,84\%$ ☐ $\alpha \leq 3,84\%$

(ii) On conserve H_0 si : ☐ $\alpha > 3,84\%$ ☐ $\alpha \leq 3,84\%$

(c) Indiquer la décision à prendre pour les niveaux α suivants.

(i) $\alpha = 1\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

(ii) $\alpha = 5\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

2. Indiquer la décision à prendre dans les situations de test suivantes.

(a) $\alpha = 1\%$ et $\alpha_{\text{obs}} = 2,8\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

(b) $\alpha = 5\%$ et $\alpha_{\text{obs}} = 5,6\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

(c) $\alpha_{\text{obs}} = 0,18\%$ et $\alpha = 1\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

3. On effectue un test bilatéral sur la moyenne. La valeur théorique testée est 15 et la moyenne observée sur l'échantillon tiré au sort est $\overline{x}_{\text{obs}} = 16,7$. La p-valeur du test est $\alpha_{\text{obs}} = 9,4\%$. Pour le test unilatéral droit correspondant, la p-valeur est égale à

- ☐ $9,4\%$
- ☐ $18,8\%$
- ☐ $4,7\%$

4. La p-valeur d'un test unilatéral est égale à $3,8\%$.

(a) Au niveau $\alpha = 5\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

(b) Pour le test bilatéral correspondant au même niveau $\alpha = 5\%$: ☐ on conserve H_0 ☐ on rejette H_0

Fin | Score : | Réponse | Cliquer sur ✔ ou ● pour accéder aux compléments de réponse.

Retour

Exercice 2

Début

1. L'exemple du juge. Un juge doit choisir entre H_0 : « l'accusé est innocent » et H_1 : « l'accusé est coupable ».

(a) L'erreur de première espèce consiste à : ☐ acquitter un coupable ☐ condamner un innocent

(b) L'erreur de deuxième espèce consiste à : ☐ acquitter un coupable ☐ condamner un innocent

(c) Minimiser le risque d'acquitter un coupable, c'est minimiser :

☐ le risque de première espèce ☐ le risque de deuxième espèce

2. Pour un test, le risque de deuxième espèce β représente la probabilité :

☐ d'accepter à tort H_1 ☐ de conserver à tort H_0 ☐ de ne pas accepter H_1 quand H_1 est vraie

3. Conclure que le résultat d'un test est significatif (à un niveau α donné) signifie :

☐ que l'on a conservé H_0 ☐ que l'on a rejeté H_0 ☐ que l'on a accepté H_1

☐ que H_0 est vraie ☐ que H_1 est vraie

4. Un test est effectué au niveau $\alpha = 5\%$. Le test conduit au non-rejet de H_0. Pour cette décision, le risque d'erreur est

☐ égal à 5% ☐ égal à 95% ☐ inconnu généralement

5. Un test effectué au niveau $\alpha = 1\%$ conduit au rejet de H_0. Pour cette décision, le risque d'erreur est :

☐ égal à 1% ☐ égal à 99% ☐ inconnu généralement

6. Pour un test d'hypothèses, la probabilité d'accepter H_1 quand H_1 est vraie est appelée :

☐ le risque de première espèce du test ☐ le risque de deuxième espèce du test ☐ la puissance du test

7. Si l'on réduit le niveau α d'un test :

☐ on agrandit l'intervalle d'acceptation ☐ on diminue le risque β ☐ on rejette moins fréquemment H_0

☐ on diminue l'intervalle d'acceptation ☐ on augmente le risque β ☐ on rejette plus fréquemment H_0

8. La puissance d'un test est d'autant plus grande que :

☐ le risque de 1re espèce α est faible ☐ le risque de 2e espèce β est faible ☐ la taille de l'échantillon est grande

Fin Score : Réponse Cliquer sur ✔ ou ● pour accéder aux compléments de réponse.

Retour

Les réponses aux questionnaires

Réponse :

Ici, pour $H_1 : \mu > 10$, on a $\alpha_{\text{obs}} = P_{H_0}(\overline{X}_n \geq 11,5)$.

La p-valeur représente la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de $\overline{X}_n$ au moins aussi extrême , dans la direction indiquée par H_1, que la valeur 11,5 effectivement observée.

Plus la valeur observée de $\overline{X}_n$ est extrême , dans la direction indiquée par H_1 (ici l'extrémité droite), et plus la p-valeur est petite.

Plus la p-valeur est petite et plus la conviction que H_0 est fausse est forte.

Retour au questionnaire.

Réponse :

La région de rejet de H_0 (RC) contient les valeurs les plus extrêmes de $\overline{X}_n$, dans le sens indiqué par H_1. Le niveau α du test en fixe le pourcentage.

La valeur observée de $\overline{X}_n$ est dans la région critique si sa p-valeur est strictement inférieure à α.

Pour le test à effectuer :

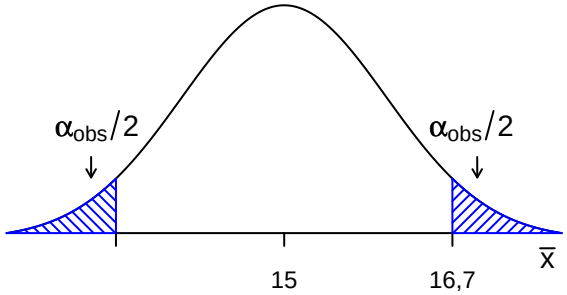
on rejette H_0 si $\alpha_{\text{obs}} < \alpha$, soit pour tout $\alpha > 3,84\%$;

on conserve H_0 si $\alpha_{\text{obs}} \geq \alpha$, soit pour tout $\alpha \leq 3,84\%$.

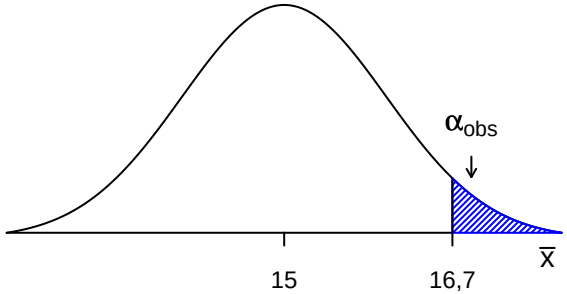
α est le risque d'erreur maximum consenti pour accepter H_1.

Retour au questionnaire.

Réponse : La p-valeur du test bilatéral est représentée en bleu sur le graphique suivant.



Elle est égale au double de la p-valeur du test unilatéral droit, représentée en bleu ci-dessous :



Pour le test unilatéral droit, on a donc $\alpha_{\text{obs}} = \frac{9,4}{2}\% = 4,7\%$.

Retour au questionnaire.

Réponse :

Pour le test unilatéral au niveau 5%, $\alpha_{\text{obs}} = 3,8\% < 5\%$, donc on rejette H_0.
La p-valeur du test bilatéral est le double de la p-valeur du test unilatéral, soit

$$\alpha_{\text{obs}} = 2 \times 3,8\% = 7,6\%.$$

Comme $\alpha_{\text{obs}} = 7,6\% > 5\%$, on conserve H_0. Le test bilatéral est dit plus « conservatif » que le test unilatéral.

Retour au questionnaire.

Réponse : L'erreur de première espèce consiste à rejeter H_0 alors que H_0 est vraie. Cela correspond ici à rejeter à tort l'hypothèse d'innocence de l'accusé, c'est-à-dire à déclarer coupable un innocent.

Retour au questionnaire.

Réponse : L'erreur de deuxième espèce consiste à conserver H_0 alors que H_1 est vraie. Cela correspond ici à conserver à tort l'hypothèse d'innocence de l'accusé, c'est-à-dire à acquitter un coupable.

Retour au questionnaire.

Réponse : Le risque d'acquitter un coupable est le risque de commettre l'erreur de deuxième espèce.

Retour au questionnaire.

Réponse :

Conserver (accepter) H_0 ne signifie pas que l'hypothèse H_0 est vraie. Le risque d'erreur que l'on court lorsqu'on conserve l'hypothèse nulle est le risque de deuxième espèce β. C'est la probabilité de conserver H_0 (ne pas accepter H_1) quand H_1 est vraie. On ne peut pas l'évaluer en général.

Retour au questionnaire.

Réponse : On dit que le résultat d'un test est significatif à un niveau α donné si la décision du test est le rejet de H_0 et donc l'acceptation de H_1. Accepter H_1, ce n'est pas démontrer que H_1 est vraie.

Retour au questionnaire.

Réponse : Ici, le risque d'erreur est celui de deuxième espèce β (risque de conserver à tort H_0). En général, on ne le connaît pas.

Retour au questionnaire.

Réponse : Pour cette décision, le risque d'erreur est celui de première espèce α (risque de rejeter à tort H_0). Ce risque est contrôlé, ici il est fixé à 1%.

Retour au questionnaire.

Réponse : La puissance mesure « l'aptitude » d'un test à rejeter H_0 (accepter H_1) quand H_1 est vraie. La probabilité complémentaire (à 1) de la puissance est le risque β. La puissance, comme le risque β, est en général inconnue.

Retour au questionnaire.

Réponse : Quand on diminue α, on agrandit l'intervalle d'acceptation. En diminuant α, on augmente donc la probabilité que la valeur observée de la statistique de test soit dans cet intervalle ; quand H_1 est vraie, la probabilité d'erreur est donc plus grande.

Les risques α et β sont antagonistes : plus le risque α est petit et plus le risque β est grand.

Retour au questionnaire.

Réponse : La puissance étant complémentaire du risque β, plus ce risque est petit, plus la puissance est grande.
Diminuer le risque α, c'est augmenter le risque β et donc réduire la puissance du test.
On peut améliorer la puissance d'un test en augmentant la taille de l'échantillon.

Retour au questionnaire.